數學傳播　49卷1期, pp. 80-95

一個由指數函數加總的函數之探討

張庭毓 · 盧彥綾 · 林珈伃

摘要: 本篇研究旨在討論 $y = f(x) = \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^x\Big)^{\frac{1}{x}}$, $n \geq 2$ 的相關性質, 其中 $x, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$。

本文

第一章

首先, 我們從 $y = g(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^x$, $x, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$, 開始討論。

性質 1-1:

(1) $y = g(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^x$, $x \in \mathbb{R}^+$, $a_1, \ldots, a_n > 1$, 爲嚴格遞增函數。

(2) $y = g(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^x$, $x \in \mathbb{R}^+$, $0 < a_1, \ldots, a_n < 1$, 爲嚴格遞減函數。

(3) $y = g(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^x$, $x \in \mathbb{R}^+$, $a_1, \ldots, a_n > 0$, 爲凸函數。

證明:

(1) 若 $x_1 < x_2$, 則 $a_i^{x_1} < a_i^{x_2}$, $\forall\, i = 1, 2, \ldots, n \;\Rightarrow\; \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{x_1} < \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{x_2}$, 故 $g(x_1) < g(x_2)$,

因此 $y = g(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^x$ 爲嚴格遞增函數。

(2) 若 $x_1 < x_2$, 則 $a_i^{x_1} > a_i^{x_2}$, $\forall\, i = 1, 2, \ldots, n \;\Rightarrow\; \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{x_1} > \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{x_2}$, 故 $g(x_1) > g(x_2)$,

因此 $y = g(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^x$ 爲嚴格遞減函數。

(3) 我們證明: 若 $y = g_1(x)$, $y = g_2(x)$ 爲凸函數, $y = G(x) = g_1(x) + g_2(x)$ 亦爲凸函數。

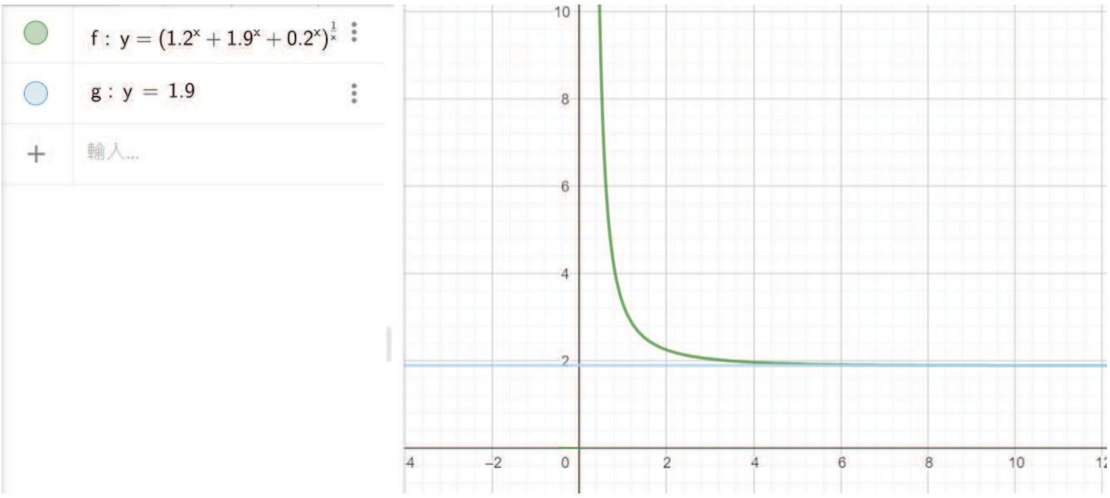
$$\begin{cases} g_1\Big(\dfrac{x_1+x_2}{2}\Big) \leq \dfrac{1}{2}g_1(x_1) + \dfrac{1}{2}g_1(x_2) \\ g_2\Big(\dfrac{x_1+x_2}{2}\Big) \leq \dfrac{1}{2}g_2(x_1) + \dfrac{1}{2}g_2(x_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow\; g_1\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big) + g_2\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big) \leq \frac{1}{2}[g_1(x_1) + g_2(x_1)] + \frac{1}{2}[g_1(x_2) + g_2(x_2)]$$

$$\Rightarrow\ G\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big) \le \frac{1}{2}G(x_1)+\frac{1}{2}G(x_2),$$ 其中 $G(x)=g_1(x)+g_2(x)$, 故 $y=G(x)$ 亦爲凸函數。而 $\because\ y=a_i^x$ 爲凸函數, $\forall\ i=1,2,\ldots,n\ \Rightarrow\ y=g(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^x$ 爲凸函數。 □

有了 $y=g(x)$ 當基礎, 我們懷疑 $y=f(x)$ 是否也有類似的性質, 我們先使用 Geogebra 進行繪圖發現幾個現象, 說明如後。

以 $y=f(x)=(1.2^x+1.9^x+0.2^x)^{\frac{1}{x}}$, $x\in\mathbb{R}^+$ 爲例子, 圖形如下:



觀察圖形, $y=f(x)$ 除了嚴格遞減的現象, 圖形似乎有水平漸近線, 且也呈現凸函數的感覺。

性質 1-2: $y=f(x)$ 爲嚴格遞減函數。

證明: 我們證明 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} > \left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$, $p<q$。

令 $\max\{a_1,\ldots,a_n\}=M$ 且 $q=p+x$, $x>0$, 則

$$\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p\right)^q}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^q\right)^p}=\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{p+x}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^{p+x}\right)^p}=\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p\right)^p\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p\right)^x}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^x a_i^p\right)^p}\ge\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p\right)^p\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p\right)^x}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}M^x a_i^p\right)^p}$$

$$=\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p\right)^p\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p\right)^x}{M^{px}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p\right)^p}=\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p\right)^x}{M^{px}}=\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p}{M^p}\right)^x>1$$

$$\Rightarrow \quad \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^q > \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^q\right)^p \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} > \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\Rightarrow \quad f(p) > f(q),\ p < q.$$

因此, $y = f(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^x\right)^{\frac{1}{x}}$, $x, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$, 爲嚴格遞減函數。 □

性質 1-3: $\lim_{x\to\infty} f(x) = M$, 其中 $\max\{a_1, \ldots, a_n\} = M$。

證明:

$$(M^x)^{\frac{1}{x}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^x\right)^{\frac{1}{x}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} M^x\right)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow M \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^x\right)^{\frac{1}{x}} \le (n\cdot M^x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} M \le \lim_{x\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^x\right)^{\frac{1}{x}} \le \lim_{x\to\infty}(n\cdot M^x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} M \le \lim_{x\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^x\right)^{\frac{1}{x}} \le \lim_{x\to\infty}(n)^{\frac{1}{x}}\cdot M$$

$$\Rightarrow M \le \lim_{x\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^x\right)^{\frac{1}{x}} \le M.$$

由夾擠定理可得 $\lim_{x\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^x\right)^{\frac{1}{x}} = M$。因此 $y = f(x)$ 的水平漸近線爲 $y = M$。 □

性質 1-4: $y = f(x)$ 爲凸函數。

證明: 我們證明 $f\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big) < \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2)$, $x_1 < x_2$。

$$\text{(I)} \quad \log f\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big) = \log\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\frac{x_1+x_2}{2}}\right)^{\frac{2}{x_1+x_2}} = \frac{2}{x_1+x_2}\log\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\frac{x_1+x_2}{2}}\right)$$

$$= \frac{2}{x_1+x_2}\log\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\frac{x_1}{2}} a_i^{\frac{x_2}{2}}\right).$$

利用柯西不等式得 $\sum_{i=1}^{n} A_iB_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} A_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n} B_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $A_i, B_i \in \mathbb{R}$, $\forall\ i = 1, 2, \ldots, n$。

令 $A_i = a_i^{\frac{x_1}{2}}$, $B_i = a_i^{\frac{x_2}{2}}$, 則可得 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{\frac{x_1}{2}} a_i^{\frac{x_2}{2}} \leq \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} (a_i^{\frac{x_1}{2}})^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} (a_i^{\frac{x_2}{2}})^2\Big)^{\frac{1}{2}}$。

$$
\begin{aligned}
\text{故 } \log f\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big) &\leq \frac{2}{x_1+x_2}\log\left[\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i^{\frac{x_1}{2}})^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i^{\frac{x_2}{2}})^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&= \frac{2}{x_1+x_2}\log\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{x_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{x_2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&= \frac{2}{x_1+x_2}\log\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{x_1}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{x_2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{x_1+x_2}\log\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{x_1}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{x_2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{x_1+x_2}\log\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{x_1}\right) + \frac{1}{x_1+x_2}\log\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{x_2}\right). \qquad (1)
\end{aligned}
$$

(II) 利用算幾不等式得 $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \geq [f(x_1)f(x_2)]^{\frac{1}{2}}$,

$$
\begin{aligned}
\text{則 } \log\left[\frac{1}{2}f(x_1)+\frac{1}{2}f(x_2)\right] &\geq \log[f(x_1)f(x_2)]^{\frac{1}{2}} \\
&= \log\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{x_1}\right)^{\frac{1}{x_1}}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{x_2}\right)^{\frac{1}{x_2}}\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{x_1}\right)^{\frac{1}{x_1}} + \frac{1}{2}\log\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{x_2}\right)^{\frac{1}{x_2}} \\
&= \frac{1}{2x_1}\log\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{x_1}\right) + \frac{1}{2x_2}\log\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{x_2}\right). \qquad (2)
\end{aligned}
$$

(III) 將 (2) 減掉 (1),

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2x_1}\log\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{x_1}\right)+\frac{1}{2x_2}\log\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{x_2}\right)-\frac{1}{x_1+x_2}\log\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{x_1}\right)-\frac{1}{x_1+x_2}\log\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{x_2}\right) \\
&= \Big(\frac{1}{2x_1}-\frac{1}{x_1+x_2}\Big)\log\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{x_1}\right) + \Big(\frac{1}{2x_2}-\frac{1}{x_1+x_2}\Big)\log\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{x_2}\right) \\
&= \frac{x_2-x_1}{2x_1(x_1+x_2)}\log\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{x_1}\right) + \frac{x_1-x_2}{2x_2(x_1+x_2)}\log\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{x_2}\right) \\
&= \frac{x_2-x_1}{2(x_1+x_2)}\left[\log\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{x_1}\right)^{\frac{1}{x_1}} - \log\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{x_2}\right)^{\frac{1}{x_2}}\right].
\end{aligned}
$$

由性質 1-2 得 $y=f(x)$ 爲嚴格遞減函數, 故 $\log\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{x_1}\Big)^{\frac{1}{x_1}} - \log\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{x_2}\Big)^{\frac{1}{x_2}} > 0$, 因此

$\log f\Big(\dfrac{x_1+x_2}{2}\Big) < \log\Big[\dfrac{1}{2}f(x_1)+\dfrac{1}{2}f(x_2)\Big] \Rightarrow f\Big(\dfrac{x_1+x_2}{2}\Big) < \dfrac{1}{2}f(x_1)+\dfrac{1}{2}f(x_2), x_1 < x_2,$

即 $y=f(x)$ 爲凸函數。 □

定理 1-5: 若 $0<p<q<r$, 則存在不等式 $\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i^q\right)^{\frac{1}{q}}<\frac{r-q}{r-p}\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\frac{q-p}{r-p}\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i^r\right)^{\frac{1}{r}}$。

證明: 根據性質 1-4 可得 $y=f(x)$ 爲凸函數, $\therefore f(tx_1+(1-t)x_2)<tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$, $0<t<1$, 令 $x_1=p$, $tx_1+(1-t)x_2=q$, $x_2=r$, 則 $t=\frac{r-q}{r-p}$, $1-t=\frac{q-p}{r-p}$, 因此

$$\begin{aligned}f(q)<tf(p)+(1-t)f(r)&\Rightarrow\left(\sum_{i=1}^n a_i^q\right)^{\frac{1}{q}}<t\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+(1-t)\left(\sum_{i=1}^n a_i^r\right)^{\frac{1}{r}}\\&\Rightarrow\left(\sum_{i=1}^n a_i^q\right)^{\frac{1}{q}}<\frac{r-q}{r-p}\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\frac{q-p}{r-p}\left(\sum_{i=1}^n a_i^r\right)^{\frac{1}{r}}.\end{aligned}$$ □

定理 1-6:

(1) 若 $y=h(x)>0$, $x\in\mathbb{R}^+$ 在 (a,b) 爲連續嚴格遞增函數, 則
$y=f\circ h(x)=\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i^{h(x)}\right)^{\frac{1}{h(x)}}$, $x\in\mathbb{R}^+$, $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}^+$, 在 (a,b) 爲嚴格遞減函數。

(2) 若 $y=h(x)>0$, $x\in\mathbb{R}^+$ 在 (a,b) 爲連續嚴格遞減函數, 則
$y=f\circ h(x)=\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i^{h(x)}\right)^{\frac{1}{h(x)}}$, $x\in\mathbb{R}^+$, $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}^+$, 在 (a,b) 爲嚴格遞增函數。

證明: (1) 若 $a<x_1<x_2<b$, 則 $h(x_1)<h(x_2)$, 且 $h(x_2)=h(x_1)+k$, $k>0$, $\max\{a_1,\ldots,a_n\}=M$。

$$\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i^{h(x_1)}\right)^{h(x_2)}}{\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i^{h(x_2)}\right)^{h(x_1)}}=\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i^{h(x_1)}\right)^{h(x_1)+k}}{\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i^{h(x_1)+k}\right)^{h(x_1)}}=\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i^{h(x_1)}\right)^{k}\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i^{h(x_1)}\right)^{h(x_1)}}{\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i^k a_i^{h(x_1)}\right)^{h(x_1)}}$$

$$\geq\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i^{h(x_1)}\right)^{k}\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i^{h(x_1)}\right)^{h(x_1)}}{\left(\sum\limits_{i=1}^n M^k a_i^{h(x_1)}\right)^{h(x_1)}}=\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i^{h(x_1)}\right)^{k}\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i^{h(x_1)}\right)^{h(x_1)}}{M^{h(x_1)k}\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i^{h(x_1)}\right)^{h(x_1)}}$$

$$=\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i^{h(x_1)}\right)^{k}}{M^{h(x_1)k}}=\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^n a_i^{h(x_1)}}{M^{h(x_1)}}\right)^{k}>\left(\frac{M^{h(x_1)}}{M^{h(x_1)}}\right)^{k}=1$$

$$\Rightarrow\left(\sum_{i=1}^n a_i^{h(x_1)}\right)^{h(x_2)}>\left(\sum_{i=1}^n a_i^{h(x_2)}\right)^{h(x_1)}\Rightarrow\left(\sum_{i=1}^n a_i^{h(x_1)}\right)^{\frac{1}{h(x_1)}}>\left(\sum_{i=1}^n a_i^{h(x_2)}\right)^{\frac{1}{h(x_2)}}$$

$\Rightarrow f\circ h(x_1)>f\circ h(x_2)$, 故 $f\circ h(x)$ 在 (a,b) 爲嚴格遞減函數。

(2) 若 $a < x_1 < x_2 < b$, 則 $h(x_1) > h(x_2)$, 且 $h(x_1) = h(x_2) + k$, $k > 0$,
$\max\{a_1, \ldots, a_n\} = M$。

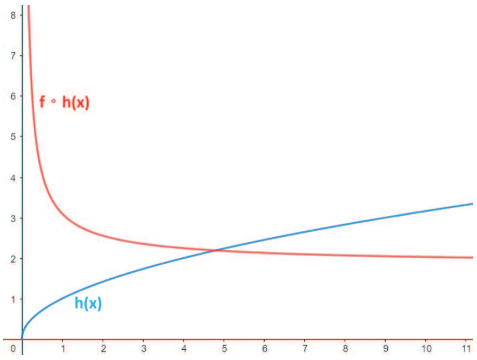
$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{h(x_2)}\right)^{h(x_1)}}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{h(x_1)}\right)^{h(x_2)}} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{h(x_2)}\right)^{h(x_2)+k}}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{h(x_2)+k}\right)^{h(x_2)}} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{h(x_2)}\right)^{k}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{h(x_2)}\right)^{h(x_2)}}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^k a_i^{h(x_2)}\right)^{h(x_2)}}$$

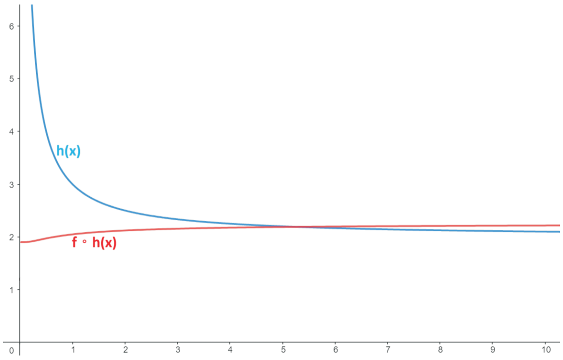
$$\geq \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{h(x_2)}\right)^{k}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{h(x_2)}\right)^{h(x_2)}}{\left(\sum_{i=1}^{n} M^k a_i^{h(x_2)}\right)^{h(x_2)}} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{h(x_2)}\right)^{k}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{h(x_2)}\right)^{h(x_2)}}{M^{h(x_2)k}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{h(x_2)}\right)^{h(x_2)}}$$

$$= \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{h(x_2)}\right)^{k}}{M^{h(x_2)k}} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^{h(x_2)}}{M^{h(x_2)}}\right)^{k} > \left(\frac{M^{h(x_2)}}{M^{h(x_2)}}\right)^{k} = 1$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{h(x_2)}\right)^{h(x_1)} > \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{h(x_1)}\right)^{h(x_2)} \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{h(x_2)}\right)^{\frac{1}{h(x_2)}} > \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{h(x_1)}\right)^{\frac{1}{h(x_1)}}$$

$\Rightarrow f \circ h(x_2) > f \circ h(x_1)$, 故 $f \circ h(x)$ 在 (a, b) 爲嚴格遞增函數。 □



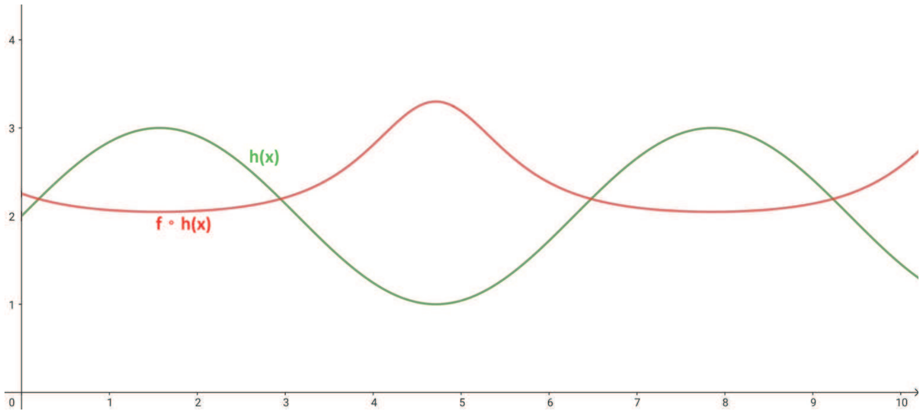


定理 1-7: 設 $y = h(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}^+$ 且 $y = f \circ h(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{h(x)}\right)^{\frac{1}{h(x)}}$,
$x \in \mathbb{R}^+, a_1 \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$。

若 $y = h(x)$ 在 $x = x_0$ 有極大值, 則 $y = f \circ h(x)$ 在 $x = x_0$ 有極小值。

若 $y = h(x)$ 在 $x = x_0$ 有極小值, 則 $y = f \circ h(x)$ 在 $x = x_0$ 有極大值。

證明: 由性質 1-6 即可得。 □



定理 1-8: 設 $y = h(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}^+$ 爲凹函數, 則 $y = f \circ h(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{h(x)}\right)^{\frac{1}{h(x)}}$, $x \in \mathbb{R}^+, a_1 \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$, 爲凸函數。

證明: 令 $x_1 < x_2$, 則 $h(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda h(x_1) + (1-\lambda)h(x_2)$, $0 < \lambda < 1$。

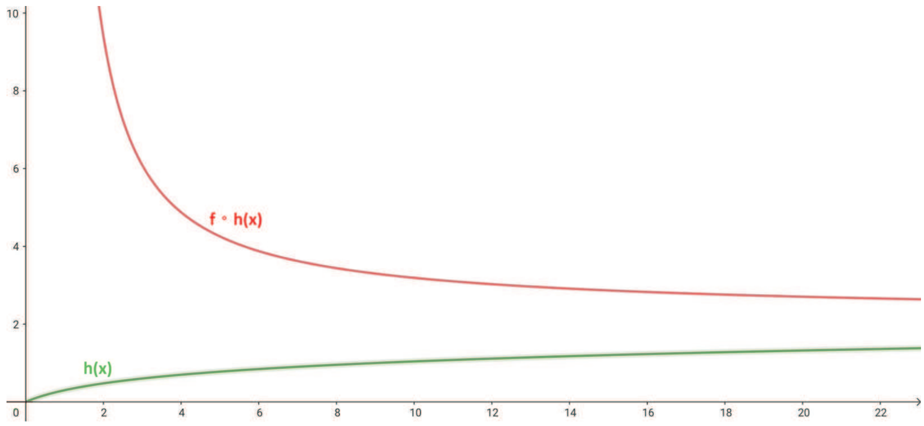
由性質 1-2 可知 $f(x)$ 爲嚴格遞減函數, 即

$$f\big(h(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)\big) \leq f(\lambda h(x_1) + (1-\lambda)h(x_2)),$$

由性質 1-4 可知 $f(x)$ 爲凸函數, 即

$$f\big(\lambda h(x_1) + (1-\lambda)h(x_2)\big) \leq \lambda f\big(h(x_1)\big) + (1-\lambda)f\big(h(x_2)\big)$$
$$\Rightarrow f\big(h(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)\big) \leq \lambda f\big(h(x_1)\big) + (1-\lambda)f\big(h(x_2)\big),$$

故可得 $y = f \circ h(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{h(x)}\right)^{\frac{1}{h(x)}}$, $x \in \mathbb{R}^+, a_1 \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$, 也爲凸函數。 □



目前爲止我們已經確定了 $y = f(x)$ 的基本性質, 接下來我們要依此性質更進一步討論。

第二章

確定了 $y=f\circ h(x)$ 的走勢後, 我們開始思考 $y=f\circ f(x)$、$y=f\circ f\circ f(x)$ 等, 甚至是 $\underbrace{f\circ\cdots\circ f(x)}_{n\text{次合成函數}}$ 的走勢, 爲了方便, 我們定義 $\underbrace{f\circ\cdots\circ f(x)}_{n\text{次合成函數}}={}_nf(x)$ 且 $f(x)={}_1f(x)$, $x={}_0f(x)$。爲了探討 $y={}_nf(x)$ 的規律, 我們先嘗試用 Excel 來計算並觀察他們的相關性, 下列是計算 $y=f(x)=(1.2^x+1.9^x)^{\frac{1}{x}}$ 近似值的表格 (四捨五入到小數點第四位)。

n	x	0.2	0.5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	$f(x)$	48.5746	0.1199	3.1000	2.2472	2.0478	1.9714	1.9367	1.9196	1.9107	1.9059	1.9034	1.9019
2	${}_nf(x)$	1.9000	1.9182	2.0369	2.1758	2.2317	2.2570	2.2694	2.2757	2.2790	2.2808	2.2818	2.2824
3	${}_nf(x)$	2.2831	2.2762	2.2351	2.1943	2.1797	2.1734	2.1704	2.1688	2.1680	2.1676	2.1674	2.1672
4	${}_nf(x)$	2.1671	2.1687	2.1788	2.1893	2.1932	2.1949	2.1957	2.1962	2.1964	2.1965	2.1966	2.1966
5	${}_nf(x)$	2.1966	2.1962	2.1935	2.1906	2.1896	2.1892	2.1889	2.1888	2.1888	2.1888	2.1887	2.1887
6	${}_nf(x)$	2.1887	2.1888	2.1896	2.1903	2.1906	2.1907	2.1907	2.1908	2.1908	2.1908	2.1908	2.1908
7	${}_nf(x)$	2.1908	2.1908	2.1906	2.1904	2.1903	2.1903	2.1903	2.1903	2.1903	2.1903	2.1903	2.1903
8	${}_nf(x)$	2.1903	2.1903	2.1903	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904
9	${}_nf(x)$	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904
10	${}_nf(x)$	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904
11	${}_nf(x)$	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904
12	${}_nf(x)$	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904
13	${}_nf(x)$	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904
14	${}_nf(x)$	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904
15	${}_nf(x)$	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904
16	${}_nf(x)$	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904
17	${}_nf(x)$	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904
18	${}_nf(x)$	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904	2.1904

仔細觀察 $n=1,\ldots,7$ 發現, 似乎 n 爲奇數時, 函數嚴格遞減; n 爲偶數時, 函數則嚴格遞增。且觀察表格中黃色區域, 函數值似乎會趨近於一定值。這兩件事我們感到非常好奇, 於是我們展開下列討論。

性質 2-1: $\max\{a_1,\ldots,a_m\}=M$ 且 $x=\mu$ 爲 $f(x)=x$ 的實根。

(1) 若 n 爲偶數, 則

⟨1⟩ $y={}_nf(x)$ 爲嚴格遞增函數。

⟨2⟩ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to\infty}{}_nf(x)={}_{n-1}f(M)\\ \lim\limits_{x\to 0}{}_nf(x)={}_{n-2}f(M)\end{cases}$ 且 $\forall x_0\in\mathbb{R}^+$, ${}_{n-2}f(M)<{}_nf(x_0)<{}_{n-1}f(M)$, $n\geq 2$。

⟨3⟩ 若 $x_0>\mu$, 則 ${}_nf(x_0)>\mu$; 若 $x_0<\mu$, 則 ${}_nf(x_0)<\mu$。

(2) 若 n 爲奇數, 則

⟨1⟩ $y={}_nf(x)$ 爲嚴格遞減函數。

〈2〉 $\begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} {}_nf(x) = {}_{n-1}f(M) \\ \lim\limits_{x\to 0} {}_nf(x) = {}_{n-2}f(M) \end{cases}$, $n \geq 3$ 且 $\forall x_0 \in \mathbb{R}^+$,

$\begin{cases} f(x_0) > M \\ {}_{n-2}f(M) > {}_n f(x_0) > {}_{n-1}f(M),\ n \geq 3 \end{cases}$。

〈3〉 若 $x_0 > \mu$, 則 ${}_nf(x_0) < \mu$; 若 $x_0 < \mu$, 則 ${}_nf(x_0) > \mu$。

(3) $x = \mu$ 爲 ${}_nf(x) = x$ 的實根。

(4) $M <{}_2 f(M) <{}_4 f(M) < \cdots < \mu < \cdots <{}_5 f(M) <{}_3 f(M) < f(M)$。

證明:

(1) 〈1〉 由性質 1-6,

$y = {}_2f(x) = f\big(f(x)\big)$ 爲嚴格遞增函數,

$y = {}_3f(x) = f({}_2f(x))$ 爲嚴格遞減函數,

$y = {}_4f(x) = f({}_3f(x))$ 爲嚴格遞增函數,

依此類推, 可得 $y = {}_n f(x)$ 爲嚴格遞增函數。

〈2〉 由性質 1-3 可知

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = M \Rightarrow \lim_{x\to\infty} {}_2f(x) = \lim_{x\to\infty} f\big(f(x)\big) = f\big(\lim_{x\to\infty} f(x)\big) = f(M)$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} {}_3f(x) = \lim_{x\to\infty} f\big({}_2f(x)\big) = f\big(\lim_{x\to\infty} {}_2f(x)\big) = f\big(f(M)\big) = {}_2f(M).$$

依此類推, 可得 $\lim\limits_{x\to\infty} {}_nf(x) = {}_{n-1} f(M)$。

$$\lim_{x\to 0} f(x) \to \infty \Rightarrow \lim_{x\to 0} {}_2f(x) = \lim_{x\to 0} f\big(f(x)\big) = \lim_{z\to\infty} f(z) = M$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} {}_3f(x) = \lim_{x\to 0} f\big({}_2f(x)\big) = f\big(\lim_{x\to 0} {}_2f(x)\big) = f(M).$$

依此類推, 可得 $\lim\limits_{x\to 0} {}_nf(x) = {}_{n-2} f(M)$。

$$\begin{cases} {}_2f(x_0) = f\big(f(x_0)\big) > M \\ f(x_0) > M \Rightarrow {}_2f(x_0) = f\big(f(x_0)\big) < f(M). \end{cases}$$

由此可得 $M <{}_2 f(x_0) < f(M)$。

由 $M <{}_2 f(x_0) < f(M)$

$\Rightarrow f(M) > f({}_2f(x_0)) > f\big(f(M)\big)$

$\Rightarrow f(M) >{}_3 f(x_0) >{}_2 f(M)$

$$\Rightarrow f\big(f(M)\big)f < f({}_3f(x_0)) < f({}_2f(M))$$
$$\Rightarrow {}_2f(M) <_4 f(x_0) <_3 f(M).$$

依此類推, 由此可得$_{n-2}f(M) <_n f(x_0) <_{n-1} f(M)$, $n \geq 4$。

⟨3⟩

$$x_0 > \mu \Rightarrow f(x_0) < f(\mu) = \mu \Rightarrow {}_2f(x_0) > f(\mu) = \mu$$
$$\Rightarrow {}_3f(x_0) < f(\mu) = \mu \Rightarrow {}_4f(x_0) > f(\mu) = \mu.$$

依此類推, 由此可得$_nf(x_0) > \mu$。

$$x_0 < \mu \Rightarrow f(x_0) > f(\mu) = \mu \Rightarrow {}_2f(x_0) < f(\mu) = \mu$$
$$\Rightarrow {}_3f(x_0) > f(\mu) = \mu \Rightarrow {}_4f(x_0) < f(\mu) = \mu.$$

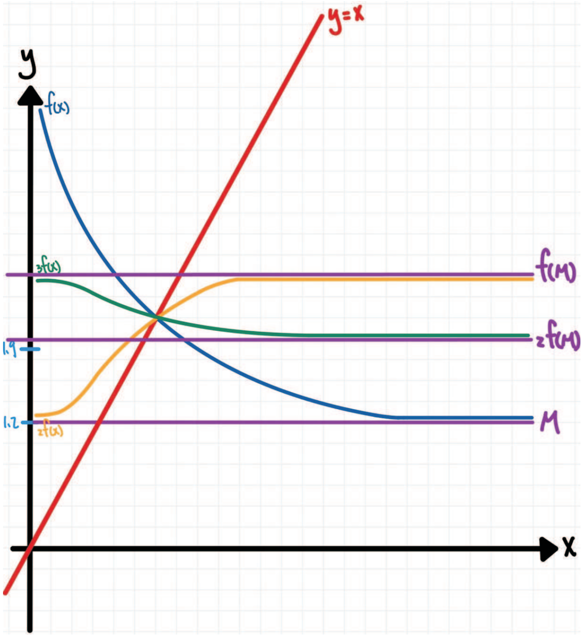
依此類推, 由此可得$_nf(x_0) < \mu$。

(2) 由 (1) 可得。

(3) $f(\mu) = \mu \Rightarrow {}_2f(\mu) = f\big(f(\mu)\big) = f(\mu) = \mu \Rightarrow {}_3f(\mu) = f\big({}_2f(\mu)\big) = f(\mu) = \mu.$
以此類推, $x = \mu$ 爲 $_nf(x) = x$ 的實根。

(4) 由 (1) ⟨2⟩ 及 (2) ⟨2⟩ 可得。

性質 2-1 淸楚說明 $y = {}_nf(x)$ 及其漸近線的圖形結構, 爲更增加印象, 我們手繪一張示意圖如下 (手繪的原因是要特別凸顯函數跟漸近線之間的關係, 故不會符合真實比例):



性質 2-2: $\max\{a_1, \ldots, a_n\} = M$, 則 $\lim\limits_{k\to\infty} {}_{2k}f(M)$ 及 $\lim\limits_{k\to\infty} {}_{2k+1}f(M)$ 收斂。

證明: $\{{}_{2k}f(M)\}$ 遞增有上界, 故 $\lim\limits_{k\to\infty} {}_{2k}f(M)$ 收斂。

$\{{}_{2k+1}f(M)\}$ 遞減有下界, 故 $\lim\limits_{k\to\infty} {}_{2k+1}f(M)$收斂。

定理 2-3: $\max\{a_1, \ldots, a_n\} = M$, 且 $x = \mu$ 爲 $f(x) = x$ 的實根。

若 $\lim\limits_{n\to\infty} {}_nf(M)$ 收斂, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} {}_nf(M) = \mu$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} {}_nf(x) = \mu$。

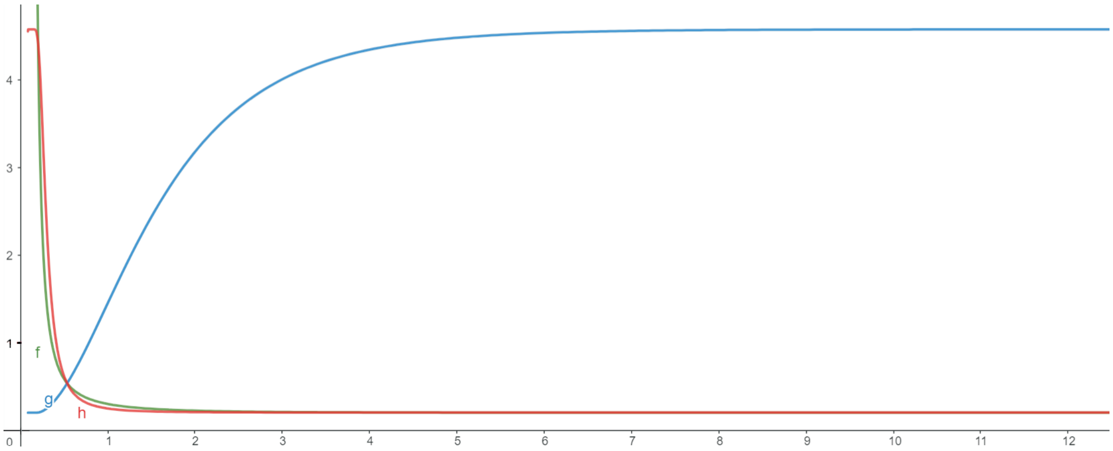
證明: 由性質 2-1 ⟨4⟩ 及性質 2-2 可得。 □

下列爲 $y = f(x) = (0.1^x + 0.2^x)^{\frac{1}{x}}$ 的表格, 似乎 $\lim\limits_{k\to\infty} {}_{2k}f(M) \neq \lim\limits_{k\to\infty} {}_{2k+1}f(M)$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} {}_nf(M)$ 會發散, 故並非任意 $y = f(x)$ 均符合定理 2-3。因此我們進一步想知道定理 2-3 的「$\lim\limits_{n\to\infty} {}_nf(M)$ 收斂」代表的意義是什麼。我們從反面思考「若 $\lim\limits_{n\to\infty} {}_nf(M)$ 發散」有什麼意義。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
${}_nf(M)$	4.5801	0.2018	4.4414	0.202	4.4234	0.2021	4.4209	0.2021	4.4206	0.2021	4.4205	0.2021

⋮

n	81	82	83	84	85	86	87	88	89	910	91	92
${}_nf(M)$	4.4205	0.2021	4.4205	0.2021	4.4205	0.2021	4.4205	0.2021	4.4205	0.2021	4.4205	0.2021



性質 2-4: 若 $\lim\limits_{n\to\infty} {}_nf(M)$ 發散 $\Leftrightarrow$ 存在 $\alpha < \mu < \beta$, 使得 $f(\alpha) = \beta$ 及 $f(\beta) = \alpha$。

證明: (1) ($\Rightarrow$)

令 $\lim\limits_{k\to\infty} {}_{2k}f(M) = \alpha$, $\lim\limits_{k\to\infty} {}_{2k+1}f(M) = \beta$, $\alpha < \beta$。

即當 k 夠大時,

$$\begin{cases} {}_{2k}f(M) \to \alpha \\ {}_{2k+1}f(M) \to \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f\big({}_{2k}f(M)\big) \to f(\alpha) \\ f\big({}_{2k+1}f(M)\big) \to f(\beta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} {}_{2k+1}f(M) \to f(\alpha) \\ {}_{2k+2}f(M) \to f(\beta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = f(\alpha) \\ \alpha = f(\beta) \end{cases}.$$

由此可得, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} {}_nf(M)$ 發散 $\Rightarrow$ 存在 $\alpha < \mu < \beta$, 使得 $f(\alpha) = \beta$ 及 $f(\beta) = \alpha$。

(2) ($\Leftarrow$)

若 $f(\beta) = \alpha$, 則 $f\big(f(\beta)\big) = f(\alpha) \Rightarrow {}_2f(\beta) = f(\alpha) = \beta$,

$\Rightarrow f\big({}_2f(\beta)\big) = f(\beta) \Rightarrow {}_3f(\beta) = f(\beta) = \alpha$,

$\Rightarrow f({}_3f(\beta)) = f(\alpha) \Rightarrow {}_4f(\beta) = f(\alpha) = \beta$。

$$\begin{cases} {}_{2k}f(\beta) = \beta \\ {}_{2k+1}f(\beta) \to \alpha \end{cases} \text{且由性質 2-1 可知} \begin{cases} {}_{2k}f(\beta) <_{2k-1} f(M) \\ {}_{2k+1}f(\beta) >_{2k} f(M) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta < \lim\limits_{k\to\infty} {}_{2k-1}f(M) \\ \alpha > \lim\limits_{k\to\infty} {}_{2k}f(M) \end{cases}.$$

$\therefore \lim\limits_{k\to\infty} {}_{2k}f(M) < \alpha < \beta < \lim\limits_{k\to\infty} {}_{2k-1}f(M) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} {}_nf(M)$ 發散。

由此可得, 若存在 $\alpha < \mu < \beta$, 使得 $f(\alpha) = \beta$ 及 $f(\beta) = \alpha$, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} {}_nf(M)$ 發散。

定理 2-5: $x = \mu$ 爲 $f(x) = x$ 的實根, $y = f(x)$ 滿足下列任一條件則 $\lim\limits_{n\to\infty} {}_nf(x) = \mu$。

(1) 不存在 $\alpha < \mu < \beta$, 使得 $f(\alpha) = \beta$ 及 $f(\beta) = \alpha$。

(2) $y = f(x)$ 圖形不存在以 $y = x$ 爲對稱軸的對稱點。

(3) ${}_2f(x) = x$ 除了 $x = \mu$ 之外無其他實根。

證明:

(1) 由性質 2-4 可得。

(2) 由 (1) 可得。

(3) 由 (1), 若 $\begin{cases} f(\alpha) = \beta \Rightarrow f\big(f(\alpha)\big) = f(\beta) \Rightarrow_2 f(\alpha) = \alpha \\ f(\beta) = \alpha \Rightarrow f\big(f(\beta)\big) = f(\alpha) \Rightarrow_2 f(\beta) = \beta \end{cases}$。

$x = \alpha$ 及 $x = \beta$ 爲 ${}_2f(x) = x$ 的實根。

因此, 若 ${}_2f(x) = x$ 除了 $x = \mu$ 之外無其他實根, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} {}_nf(x) = \mu$。 □

研究完定理 2-5 後, 我們懷疑任意 $\omega \in \mathbb{R}^+$, 是否存在一個 $y = f(x)$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} {}_nf(x) = \omega$, 且 $y = f(x)$ 是否唯一。

更進一步討論, 任意正實數 ω 只要是某一個方程式 $f(x) = x$ 的實根且 ${}_2f(x) = x$ 僅有一實根, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} {}_nf(x) = \omega$, 接下來我們要試著找出這個 $y = f(x)$。

我們考慮 ω 是否爲 $(a_1^x+a_2^x)^{\frac{1}{x}}=x$ 的實根, 即爲 $a_1^x+a_2^x=x^x$ 的實根, 且 $\omega>\max\{a_1,a_2\}$。

$$令\ a_1<\omega,\ 則\ a_1^\omega+a_2^\omega=\omega^\omega\Rightarrow a_2=(\omega^\omega-a_1^\omega)^{\frac{1}{\omega}},$$

$$\therefore\ f(x)=\Big[a_1^x+\Big((\omega^\omega-a_1^\omega)^{\frac{1}{\omega}}\Big)^x\Big]^{\frac{1}{x}}$$

對任意 $a_1<\omega$, 則可得 $f(x)=\Big[a_1^x+\Big((\omega^\omega-a_1^\omega)^{\frac{1}{\omega}}\Big)^x\Big]^{\frac{1}{x}}$,

但 $\lim\limits_{n\to\infty}{}_nf(x)$ 不一定能收斂, 也就是雖然我們找到了函數, 還需更進一步確認收斂的正確性。

性質 2-6:

(1) 任意兩正實數 $\lambda<\omega$, 若 $f(x)_\lambda=\Big[\lambda^x+\Big((\omega^\omega-\lambda^\omega)^{\frac{1}{\omega}}\Big)^x\Big]^{\frac{1}{x}}$, 則 $f(\omega)=\omega$。

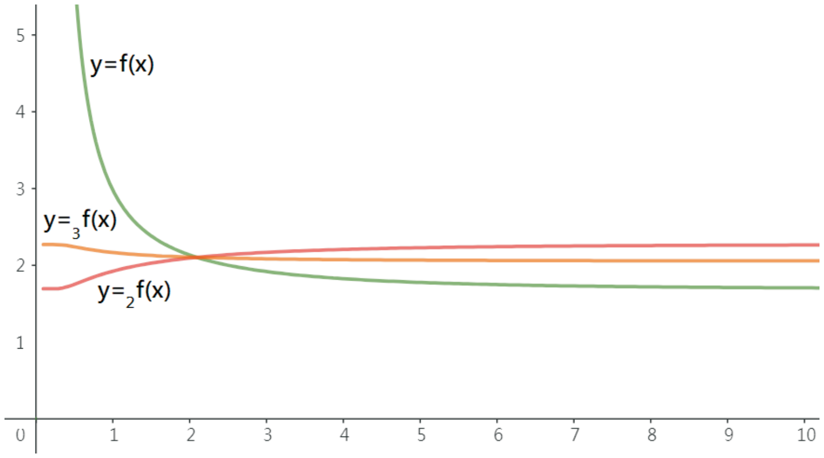
(2) 若${}_2f(x)_\lambda=x$ 僅有一實根 ω, 則 $\lim\limits_{n\to\infty}{}_nf(x)_\lambda=\omega$。

證明:

(1) $f(\omega)=\Big[\lambda^x+\Big((\omega^\omega-\lambda^\omega)^{\frac{1}{\omega}}\Big)^\omega\Big]^{\frac{1}{\omega}}=[\lambda^\omega+\omega^\omega-\lambda^\omega]^{\frac{1}{\omega}}=\omega$,
且 $x=\omega$ 爲 ${}_2f(x)=x$ 的實根。

(2) 由定理 2-5 可得。 □

以 $\lambda=1.3$, $\omega=2.1$ 爲例, $f(x)_{1.3}=\Big[1.3^x+\Big((2.1^{2.1}-1.3^{2.1})^{\frac{1}{2.1}}\Big)^x\Big]^{\frac{1}{x}}$ 圖形如下:



n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
${}_nf(M)$	2.2666	2.0525	2.1153	2.0953	2.1015	2.0995	2.1001	2.1	2.1	2.1	2.1	2.1

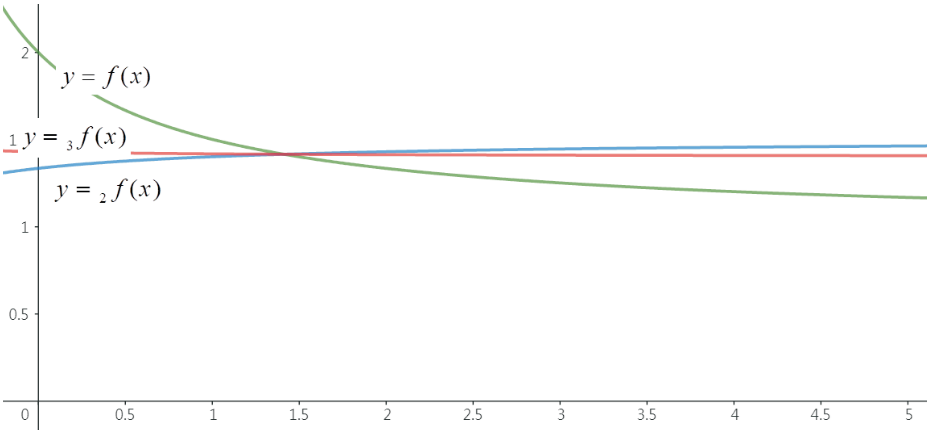
⋮

n	81	82	83	84	85	86	87	88	89	910	91	92
${}_nf(M)$	2.1	2.1	2.1	2.1	2.1	2.1	2.1	2.1	2.1	2.1	2.1	2.1

可從 Excel 表格看出 $\lim\limits_{n\to\infty}{}_nf(x)_{1.3}=2.1$。

第三章

目前爲止我們知道此類函數只要滿足定理 2-5, $\{{}_nf(x)\}$ 就會收斂, 我們懷疑除了此類函數, 其他函數是否也有這樣的收斂特性。以 $y=f(x)=1+\frac{1}{x+1}$ 爲例, 下列是計算近似值的表格 (四捨五入到小數點第四位) 及圖形。



n	x	0.2	0.5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	$f(x)$	1.8333	1.6667	1.5	1.3333	1.25	1.2	1.667	1.1429	1.125	1.1111	1.1	1.0909
2	${}_nf(x)$	1.3529	1.375	1.4	1.4286	1.4444	1.4545	1.4615	1.4667	1.4706	1.4737	1.4762	1.4783
3	${}_nf(x)$	1.425	1.4211	1.4167	1.4118	1.4091	1.4074	1.4063	1.4054	1.4048	1.4043	1.4038	1.4035
4	${}_nf(x)$	1.4142	1.413	1.4138	1.4146	1.4151	1.4154	1.4156	1.4157	1.4158	1.4159	1.416	1.4161
5	${}_nf(x)$	1.4145	1.4144	1.4143	1.4141	1.4141	1.414	1.414	1.414	1.4139	1.4139	1.4193	1.4139
6	${}_nf(x)$	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4143	1.4143	1.4143	1.4143	1.4143	1.4143	1.4143
7	${}_nf(x)$	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142
8	${}_nf(x)$	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142
9	${}_nf(x)$	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142
10	${}_nf(x)$	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142
11	${}_nf(x)$	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142
12	${}_nf(x)$	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142
13	${}_nf(x)$	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142
14	${}_nf(x)$	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142
15	${}_nf(x)$	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142
16	${}_nf(x)$	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142
17	${}_nf(x)$	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142
18	${}_nf(x)$	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142
19	${}_nf(x)$	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142
20	${}_nf(x)$	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142	1.4142

經由上述表格及圖形我們發現此函數和上述函數一樣也能收斂, 於是我們展開了下列的討論。下列的 $y=f(x)$ 不一定爲上述函數, 但 $y=f(x)>0$, $x\in\mathbb{R}^+$。

性質 3-1:

(1) 若 $y=f(x)$ 爲嚴格遞減連續函數, $y=h(x)$ 爲嚴格單調連續函數, 則 $y=f\circ h(x)$ 的

單調性跟 $y=h(x)$ 相反。

(2) 若 $y=f(x)$ 爲嚴格遞增連續函數, $y=h(x)$ 爲嚴格單調連續函數, 則 $y=f\circ h(x)$ 的單調性跟 $y=h(x)$ 一致。

證明:

(1) 令 $y=h(x)$ 爲嚴格遞增連續函數。

$$\text{若 } x_1<x_2, \text{則 } h(x_1)<h(x_2)\Rightarrow f\big(h(x_1)\big)>f\big(h(x_2)\big)\Rightarrow f\circ h(x_1)>f\circ h(x_2)。$$

令 $y=h(x)$ 爲嚴格遞減連續函數。

$$\text{若 } x_1<x_2, \text{則 } h(x_1)>h(x_2)\Rightarrow f\big(h(x_1)\big)<f\big(h(x_2)\big)\Rightarrow f\circ h(x_1)<f\circ h(x_2)。$$

由此可知, $y=f\circ h(x)$ 的單調性與 $y=h(x)$ 相反。

(2) 令 $y=h(x)$ 爲嚴格遞增連續函數。

$$\text{若 } x_1<x_2, \text{則 } h(x_1)<h(x_2)\Rightarrow f\big(h(x_1)\big)<f\big(h(x_2)\big)\Rightarrow f\circ h(x_1)<f\circ h(x_2)。$$

令 $y=h(x)$ 爲嚴格遞減連續函數。

$$\text{若 } x_1<x_2, \text{則 } h(x_1)>h(x_2)\Rightarrow f\big(h(x_1)\big)>f\big(h(x_2)\big)\Rightarrow f\circ h(x_1)>f\circ h(x_2)。$$

由此可知, $y=f\circ h(x)$ 的單調性與 $y=h(x)$ 一致。 □

性質 3-2: $y=f(x)$ 爲嚴格遞減連續函數, 若 $\begin{cases}\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=M>0\\ \text{或} \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=M \text{ 且 } \lim\limits_{x\to 0} f(x)<\infty\end{cases}$, $x=\mu$ 爲 $f(x)=x$ 的實根。

(1) 若 n 爲偶數, 則

⟨1⟩ $y={}_nf(x)$ 爲嚴格遞增函數。

⟨2⟩ $\lim\limits_{x\to\infty} {}_nf(x)={}_{n-1}f(M)$ 且 $\forall x_0\in\mathbb{R}^+$, ${}_{n-2}f(M)<{}_nf(x_0)<{}_{n-1}f(M)$, $n\geq 2$。

⟨3⟩ 若 $x_0>\mu$, 則 ${}_nf(x_0)>\mu$; 若 $x_0<\mu$, 則 ${}_nf(x_0)<\mu$。

(2) 若 n 爲奇數, 則

⟨1⟩ $y={}_nf(x)$ 爲嚴格遞減函數。

⟨2⟩ $\lim\limits_{x\to\infty} {}_nf(x)={}_{n-1}f(M)$ 且 $\forall x_0\in\mathbb{R}^+$, $\begin{cases}f(x_0)>M\\ {}_{n-2}f(M)>{}_nf(x_0)>{}_{n-1}f(M),\ n\geq 3\end{cases}$。

⟨3⟩ 若 $x_0>\mu$, 則 ${}_nf(x_0)<\mu$; 若 $x_0<\mu$, 則 ${}_nf(x_0)>\mu$。

(3) $x=\mu$ 爲 ${}_nf(x)=x$ 的實根。

(4) $M <_2 f(M) <_4 f(M) < \cdots < \mu < \cdots <_5 f(M) <_3 f(M) < f(M)$。

證明: 由性質 2-1可得。 □

定理 3-3: 設 $x=\mu$ 爲 $f(x)=x$ 的正實根, 若$_2f(x)=x$ 除了 $x=\mu$ 之外無其他實根, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} {}_nf(x)=\mu$。

證明: 由定理 2-5 可得。 □

研究結果

1. $y=f(x)$ 爲嚴格遞減函數。
2. $y=f(x)$ 的水平漸近線爲 $y=M$, 且 $M=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, 其中 $\max\{a_1,\ldots,a_n\}=M$。
3. $y=f(x)$ 爲凸函數。

   若 $0<p<q<r$, 則 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^q\right)^{\frac{1}{q}} < \dfrac{r-q}{r-p}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \dfrac{q-p}{r-p}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^r\right)^{\frac{1}{r}}$。
4. (1) 若 $y=h(x)>0$, $x\in\mathbb{R}^+$ 在 (a,b) 爲連續嚴格遞增函數, 則

   $y=f\circ h(x)=\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{h(x)}\right)^{\frac{1}{h(x)}}$, $x\in\mathbb{R}^+$, $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}^+$, 在 (a,b) 爲嚴格遞減函數。

   (2) 若 $y=h(x)>0$, $x\in\mathbb{R}^+$ 在 (a,b) 爲連續嚴格遞減函數, 則

   $y=f\circ h(x)=\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{h(x)}\right)^{\frac{1}{h(x)}}$, $x\in\mathbb{R}^+$, $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}^+$, 在 (a,b) 爲嚴格遞增函數。
5. $x=\mu$ 爲 $f(x)=x$ 的實根, 若 $_2f(x)=x$ 除了 $x=\mu$ 之外無其他實根, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} {}_nf(x)=\mu$。
6. 任意兩正實數 $\lambda<\omega$, 若 $f(x)_\lambda=\left[\lambda^x+\left(\left(\omega^\omega-\lambda^\omega\right)^{\frac{1}{\omega}}\right)^x\right]^{\frac{1}{x}}$, 若 $_2f(x)_\lambda=x$ 僅有一實根 ω, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} {}_nf(x)_\lambda=\omega$。
7. $y=f(x)$ 爲嚴格遞減連續函數, $x=\mu$ 爲 $f(x)=x$ 的實根, 若 $_2f(x)=x$ 除了 $x=\mu$ 之外無其他實根, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} {}_nf(x)=\mu$。

結論

在這次的研究中, 我們透過不同層面的數學知識, 利用各項相關不等式證明出函數的性質, 雖然在研究過程中, 我們遇到許多問題, 像是溝通上的困難、時間緊迫、抑或是對全新領域的陌生, 但也因爲如此學習到了很多, 增進了做書面報告的能力, 也在其中學習到許多高中課程裡沒有的數學知識, 這一切全都需要團隊的努力和互相磨合, 尤其在途中會出現意見或看法的不同, 但經過每次的討論, 我們的觀念也逐漸統一, 這是在許多合作中體會不到的。

—本文作者張庭毓、盧彥綾、林珈伃投稿時爲彰化女中三年級學生, 指導老師盧俊豪老師—